

MODELOS GAMLSS EN EL PROCESO DE RECRUBRIMIENTO DE INSTRUMENTACIÓN QUIRÚRGICO CON CROMODURO



UNIVERSIDAD
NACIONAL
DE COLOMBIA

Laura Nataly Montoya Colorado
Yeison Yovany Ocampo Naranjo
Freddy Hernández Barajas

Universidad Nacional de Colombia Sede Medellín

1. Resumen

En este artículo se presenta un análisis alternativo para los datos del artículo "Modelamiento del proceso de recubrimiento de instrumental quirúrgico con cromoduro" Ruíz et al. (2003) el cual estudia el comportamiento del espesor del recubrimiento de cromoduro presente en las portaguas quirúrgicas. Lo que busca dicho análisis es mejorar los resultados usando metodologías de los modelos de regresión lineal múltiple, en especial los modelos GAMLSS (Generalized Additive Models for Location, Shape and Scale).

2. Introducción

El objetivo de reanalizar los datos de Ruíz et al. (2003) es proponer mejoras en el modelo propuesto inicialmente, tratando de explicar mejor la variable respuesta y de esta manera lograr predicciones más precisas. Para ello se usó una de las metodologías de la regresión lineal múltiple, la metodología GAMLSS, la cual considera una dependencia de las covariables para la varianza, caso que nos da una gran ventaja ya que nos permite modelarla y tratar de explicar su comportamiento cuando no es constante.

3. Metodología

El modelo de regresión lineal múltiple considerado por Ruíz et al. (2003) es el siguiente:

$$E[Y] = \beta_0 + \sum_{i=1}^k \beta_i X_i + \sum_{i=1}^k \beta_{ii} X_i^2 + \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^L \beta_{i,j} X_i X_j$$

$$Var[Y] = \sigma^2,$$

donde Y representa el espesor de cromoduro [mm], X_1 representa el tiempo [min], X_2 representa la densidad de corriente [A/dm^2] y X_3 representa la temperatura [$^{\circ}C$], K el número de covariables $K = 3$ y L es el número de interacciones $i \neq j$

Ruíz et al. (2003) reportan el modelo final ajustado siguiente:

$$\widehat{Espesor} = 7,0129 - 0,123637 \times Tiempo + 0,12756 \times Dens - 0,0589039 \times Temp + 0,00331388 \times Tiempo^2$$

Este modelo tiene un $R^2 = 0,7463$ y $Corr(Y, \hat{Y}) = 0,8977$

Modelos GAMLSS

Los modelos GAMLSS (*Generalized Additive Model for Location Scale and Shape*) propuestos por Rigby y Stasinopoulos(2005) son de gran utilidad ya que permiten modular todos los parámetros de la variable de interés en función de las covariables, además, la ventaja que tienen sobre los modelos lineales usuales radica en que permiten elegir la distribución más adecuada para la variable respuesta y no se limitan al supuesto de normalidad. En dichos modelos, las observaciones son independientes donde su función de densidad de probabilidad depende del vector de parámetros. La estructura general de los modelos GAMLSS es:

$$g_k(\theta_k) = n_k = X_k \beta_k + \sum_{j=1}^{J_k} Z_{jk} \gamma_{jk}$$

donde g_k es una función de enlace conocida para el parámetro θ y n_k son vectores n -dimensionales; X_k son matrices de diseño conocidas ($n \times J'_k$) asociadas a los efectos fijos β_k ($J'_k \times 1$); Z_{jk} son matrices de diseño conocidas de orden ($n \times q_{jk}$) asociadas a los efectos aleatorios γ_{jk} ($q_{jk} \times 1$) con distribución normal multivariada. J'_k es el número de covariables usadas en la parte fija del predictor lineal n_k , mientras que J_k es el número de efectos aleatorios en n_k .

4. Análisis Descriptivo

Las variables consideradas en el estudio de Ruíz et al. (2003) son:

1. **Tiempo:** tiempo de exposición en minutos que se deja la pieza en la solución de cromoduro.
2. **Dens:** densidad de corriente aplicada en el proceso

(A/dm^2).

3. **Temp:** temperatura del baño en el que se realiza el proceso ($^{\circ}C$).

4. **Espesor:** espesor promedio luego del proceso (micras).

Se realizó un análisis para descartar la posible existencia de multicolinealidad entre las covariables y evitar ajustes erróneos del modelo, para el cual se usó la librería mctest del programa estadístico R.

Gráfico de Correlaciones entre las variables

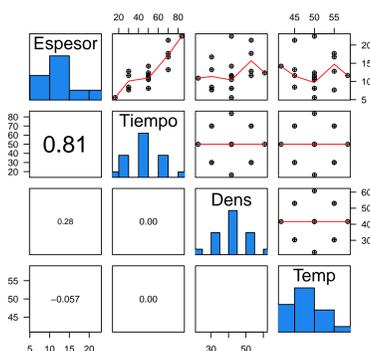


Figura 1: Diagramas de dispersión, correlaciones entre las variables del experimento. En la diagonal los histogramas para las variables.

En la figura 1 se puede apreciar una relación alta entre la variable respuesta espesor de cromoduro y el tiempo de exposición, lo cual da indicios de que esta covariable aportará significativamente al modelo, mientras que la temperatura tiene una relación baja con la variable dependiente y por tanto se tiene la creencia que no será significativa en el modelo.

5. Modelación (Metodología GAMLSS)

Antes de construir los modelos se realizó un análisis marginal de la variable respuesta para identificar la distribución con soporte en R^+ que mejor explican el patrón de variación del espesor. Las cuatro distribuciones tienen 2 parámetros que se denotan por μ y σ .

Modelo	Distribución	GAIC	Corr(Y, Ŷ)	Pseudo R ²
1	Gamma	83,666	0,9053	0,7919
2	Log-Normal	83,992	0,9043	0,7936
3	Inversa Gaussiana	84,450	0,8932	0,8099
4	Inversa Gamma	84,490	0,9047	0,8000

Tabla 1: Distribuciones que mejor explican el patrón de variación de la variable espesor.

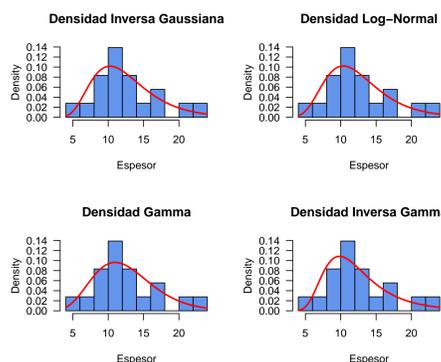


Figura 2: Histogramas del espesor y densidades de la Inversa Gaussiana, Log-normal, Gamma e Inversa Gamma.

Partiendo de las distribuciones mostradas en la Figura 2, se ajustaron cuatro modelos y en cada uno de ellos se modelaron los parámetros μ y σ en función de las covariables. A partir de estos modelos se realizó un proceso de selección de variables.

Se eligió el modelo 1 de la Tabla 1, ya que éste presentaba el menor GAIC (*Generalized Akaike Information Criterion*) y mayor $Corr(Y, \hat{Y})$

Las correlaciones del modelo 1 ajustado con distribución gamma y la presentada por Ruíz et al. (2003) son muy similares, siendo de 0,9053 y 0,8977, respectivamente. Por lo tanto, ambos modelos describen correctamente la variabilidad de la variable respuesta.

6. Resultados

En la parametrización de la distribución gamma con parámetros μ y σ usada en la metodología GAMLSS, su esperanza está dada por: $E[Y] = \mu$ y su varianza por $Var[Y] = \sigma^2 \mu^2$.

Modelo log(μ)	Estimación	Error estándar	Valor-t	Valor-p
Intercepto	2,0240	0,9147	2,213	0,0513
Tiempo	0,0087	0,0134	0,648	0,5314
Dens	-0,0256	0,0367	-0,697	0,5016
Tiempo ²	0,0001	0,0001	0,821	0,4309
Dens ²	0,0004	0,0004	1,002	0,3400

Modelo log(σ)	Estimación	Error estándar	Valor-t	Valor-p
Intercepto	-3,0286	1,8107	-1,673	0,125
Tiempo	0,0804	0,0812	0,990	0,346
Tiempo ²	-0,0010	0,0008	-1,250	0,240

Tabla 2: Resultados del modelo 1 ajustado

$$\hat{\mu} = \exp(2,0240 + 0,0087 \text{ Tiempo} - 0,0256 \text{ Dens} + 0,00001 \text{ Tiempo}^2 + 0,0004 \text{ Dens}^2)$$

$$\hat{\sigma} = \exp(-3,0286 + 0,0804 \text{ Tiempo} - 0,0010 \text{ Tiempo}^2)$$

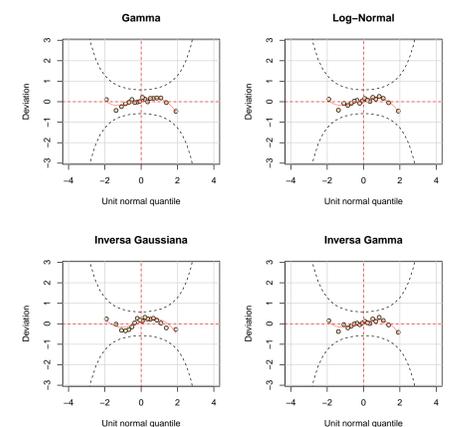


Figura 3: Worm plot para los modelos ajustados con GAMLSS.

Para analizar los residuales se realizó el gráfico de la Figura 3, el cual es una modificación del gráfico(quantil-quantil), en este se evidencia un buen ajuste de los modelos ya que los residuales se encuentran en el centro y no sobrepasan las hipérbolas.

Superficie de Respuesta del Espesor promedio

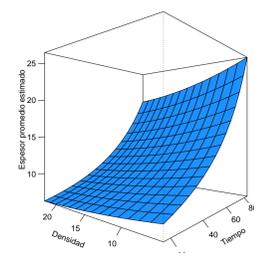


Figura 4: Superficie de respuesta para el valor esperado del recubrimiento de cromoduro.

7. Conclusiones

De los resultados se encontró que el espesor promedio de cromoduro puede ser explicado en función del tiempo de exposición y de la densidad de corriente. De la expresión 1 y la figura 4 se observa que a mayor tiempo de exposición del instrumento en la solución de cromoduro y a menor densidad de corriente, el espesor promedio del recubrimiento aumenta. Por último, se encontró que la temperatura del baño no es significativa.

Los resultados de este artículo son de suma importancia porque permite obtener unas mejores estimaciones y predicciones ayudando así a cumplir el objetivo primordial de Ruíz et al. (2003).

Referencias

- Ruíz, J ; Parra, C.M ; Bustamante, C.M ; Vélez, E ; Rivera, L.A (2003) Modelamiento del proceso de recubrimiento de instrumental quirúrgico con cromoduro *Facultad de Ingeniería Universidad de Antioquia*, 30, 89–94
- Rigby R.A. and Stasinopoulos D.M. (2005). Generalized additive models for location, scale and shape,(with discussion), *Appl. Statist.*, 54, part 3, pp 507-554.